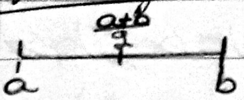
3-12-18

Θεώρημα Bolzano

Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής και $f(a)f(b)<0 \to \exists\, \xi\in(a,b)$ τω $f(\xi)=0$

Απόδειξη.

Κιβωτισμός Cantor



$f(a), f(b)$ έχουν διαφορετικό πρόσημο

$\Rightarrow$ Είτε $f(\frac{a+b}{2})=0$ (οπότε τελειώσαμε)

Είτε $f(\frac{a+b}{2})f(a)<0$ είτε $f(\frac{a+b}{2})f(b)<0$

$\Rightarrow \exists\,[a_1,b_1]\subseteq[a,b]$ τω $f(a_1)f(b_1)<0$ κ' $b_1-a_1=\frac{1}{2}(b-a)$

$\Rightarrow \exists\,[a_2,b_2]\subseteq[a_1,b_1]$ τω $f(a_2)f(b_2)<0$ κ' $b_2-a_2=\frac{1}{2}(b_1-a_1)=\frac{1}{4}(b-a)$

$\exists\,[a_n-b_n]\subseteq[a_{n-1},b_{n-1}]$ τω $f(a_n)f(b_n)<0$ και

$b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a)\xrightarrow{n\to\infty}0$

Βρήκαμε έναν κιβωτισμό του Cantor $\{[a_n,b_n]\}$, τω $f(a_n)f(b_n)<0,\ \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow \exists!\,\xi\in[a,b]$ τω $\xi\in[a_n,b_n],\ \forall n\in\mathbb{N}$ και (γνωρίζουμε) $a_n,b_n\to\xi$

Θδο $f(\xi)=0$

f συνεχής (στο ξ) $\Rightarrow f(a_n)\to f(\xi)$

$f(b_n)\to f(\xi)$

$0>\min\{f(a_n),f(b_n)\}\to f(\xi)\Rightarrow f(\xi)\le 0$

$0<\max\{f(a_n),f(b_n)\}\to f(\xi)\Rightarrow f(\xi)\ge 0$

$\Leftrightarrow$ ὅ.ε.δ.

$x_n,y_n\to l\in\mathbb{R}$

$\min\{x_n,y_n\}\to l$

$\max\{x_n,y_n\}\to l$

$\max\{x_n,y_n\}=\frac{1}{2}(x_n+y_n+|x_n-y_n|)\to l$

$\min\{x_n,y_n\}=\frac{1}{2}(x_n+y_n-|x_n-y_n|)\to l$

Άσκηση

$P(x)=x^4+7x-9,\ x\in\mathbb{R}$

νδο $P(x)$ έχει τουλάχιστον 2 ρίζες.

Λύση

$\lim\limits_{x\to+\infty} p(x)=+\infty \Rightarrow \exists\, x_0\in\mathbb{R}$, τ.ω. $p(x_0)>0$

Επίσης, $p(0)=9<0$, $p(0)p(x_0)<0$

$\exists\, \xi$ μεταξύ των 0, x_0 τ.ω. $p(\xi)=0$.

$\Rightarrow \exists$ πολυώνυμο $q(x)$ βαθμού 3ου τ.ω. $p(x)=(x-\xi)q(x)$

$\exists\, \xi'\in\mathbb{R}$ ρίζα του $q(x)$

$(q(\xi')=0) \Rightarrow p(\xi')=0$

Περίπτωση 1 → $\xi\neq\xi' \Rightarrow$ Τέλος.

Περίπτωση 2 → $\xi=\xi'$: $p(x)=(x-\xi)q(x)=(x-\xi)(x-\xi)\overset{\text{πολ/μο 2ου βαθ}}{r(x)}=(x-\xi)^2 r(x)$.

Αν $r(x)$ έχει το πολύ μια ρίζα, τότε το $r(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο.

$\Rightarrow p(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο, Άτοπο

$\Rightarrow r(x)$ έχει τουλάχιστον 2 ρίζες

$\Rightarrow p(x)$ έχει τουλάχιστον 2 ρίζες

Άσκηση

νδο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{1}{2}$

Απόδειξη

Έστω $\varepsilon>0$

$$\left|\frac{x^2}{x+1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{2x^2-x-1}{2(x+1)}\right|=\left|\frac{2(x-1)(x+1/2)}{2(x+1)}\right|=\left|\frac{x+1/2}{x+1}\right||x-1|$$

Αναζητώ $\frac{1}{2}>\delta>0$, τ.ω. $\forall x\in(1-\delta,1+\delta)\setminus\{1\}$ να ισχύει

$$\left|\frac{x^2}{x+1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{x+1/2}{x+1}\right||x-1|<\varepsilon$$

Θα βρω ένα άνω φράγμα της ποσότητας $\left|\dfrac{x+1/2}{x+1}\right|$

$1-\delta<x<1+\delta \Rightarrow x+\frac{1}{2}<1+\delta+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}+\delta<\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$ και

Επίσης $x > 1-\delta > 1/2 \Rightarrow x+1 > 3/2$ $\left(x+\frac{1}{2} > 1 > 0\right)$

$\Rightarrow$ Για $x \in (1-\delta, 1+\delta)$, $\left|\frac{x+1/2}{x+1}\right| = \frac{x+1/2}{x+1} < \frac{2}{3/2} = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow \forall x \in (1-\delta, 1+\delta)$, $\left|\frac{x^2}{x+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{x+1/2}{x+1}\right| |x-1| < \frac{4}{3}|x-1| <$

$\frac{4\delta}{3}$

Αρκεί να πάρω $\delta = \frac{3}{4} \cdot \varepsilon$ (ή οποιοδήποτε μικρότερο)

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N > 0$ τω $\forall x < -N$

να ισχύει $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αναζητάμε $N \in \mathbb{R}$ τω $\forall x < -N$, $e^x =$
$|e^x - 0| < \varepsilon$, $\varepsilon^x < 0 \to x < \log \varepsilon$

Παίρνω $N = -\log \varepsilon > 0$

Θεώρημα

Έστω $f : [a,b] \to [c,d]$, γν. μονότονη κ' επί, τότε η f^{-1} ορίζεται, είναι γν. μονότονη (με την ίδια μονοτονία) κ' επί και αν f είναι συνεχής, τότε και η f^{-1} είναι συνεχής

Απόδειξη

(Χωρίς βλάβη της γενικότητας)

f γν. αύξουσα

Έστω $y_1, y_2 \in [c,d]$ τω $y_1 < y_2$. Αρκεί (για νδο f^{-1} γν. αύξουσα) νδο $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, $\exists x_1, x_2 \in [a,b]$ τω $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$

Αν $x_1 \geq x_2 \xRightarrow{f \text{ αύξουσα}} f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow y_1 \geq y_2$, Άτοπο

$\Rightarrow f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2)$

Έστω $\xi \in [c,d]$, Αρκεί νδο f^{-1} συνεχής στο ξ.

Έστω $\{y_n\} \subseteq [c,d]$, τω. $y_n \to \xi$. Αρκεί νδο $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(\xi)$

$\exists\, x_0 \in [a,b]$, τω. $f(x_0) = \xi \Leftrightarrow f^{-1}(\xi) = x_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$,

$\exists\, x_n \in [a,b]$, τω. $f(x_n) = y_n \Leftrightarrow f^{-1}(y_n) = x_n$ $(x_n \in [a,b], \forall n \in \mathbb{N})$

Αρκεί νδο $x_n \to x_0$. Έστω ότι $x_n \not\to x_0 \Rightarrow \exists\, l \in [a,b]$, $l \neq x_0$ τω. $\exists\, \{x_{kn}\}$ υπακολουθία τω. $\{x_n\}$ τω. $x_{kn} \to l \overset{f \text{ συνεχής}}{\Longrightarrow} f(x_{kn}) \to f(l)$

$\Rightarrow y_{kn} = f(l) \Rightarrow \xi = f(l) \Rightarrow f(x_0) = f(l) \overset{f\ \text{"1-1"}}{\Longrightarrow} x_0 = l$,

Άτοπο

Θεώρημα

Έστω $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής κ 1-1. Τότε f γν. μονότονη (οποιοδήποτε διάστημα)

Απόδειξη

Έστω ότι f δεν είναι γν. μονότονη $\Rightarrow \exists\, x_1, x_2, x_3 \in [a,b]$ με $x_1 < x_2 < x_3$ τω. $f(x_1) < f(x_2)$ κ' $f(x_2) > f(x_3)$ ή $f(x_1) > f(x_2)$ και $f(x_2) < f(x_3)$

Αλλιώς $\forall\, x_1, x_2, x_3 \in [a,b]$ με $x_1 < x_2 < x_3$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1) < f(x_2) < f(x_3) \\ f(x_1) > f(x_2) > f(x_3) \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ γν. μονότονη}$$

ΑΤΟΠΟ